Не са написани някои неща, които вече фигурират във файла по Дискретни структури в **Лекция 2**, **Лекция 3**, **Лекция 4** и **Лекция 6**.

Лекция 1 Реални числа - първа част

1.1 Множества

Множество на естествените числа $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Множество на целите числа $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Множество на рационалните числа $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Множество на реалните числа $\mathbb{R} = \{s\, a_0.a_1a_2 \cdots : s \in \{+, -\}, a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_n \in \{1, 2, ..., 9\}, n \in \mathbb{N}\}$

Нека $a = a_0.a_1a_2 \cdots$, $b = b_0.b_1b_2 \cdots$ и $a, b \in \mathbb{R}$.

- *Равенство:*
  $a = b$, ако имат еднакви знаци и
  - *или* $a_i = b_i$ за всички $i \in \{0, 1, 2, ...\}$,
  - *или* съществува $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такова че $a_i = b_i$ за всички $i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}, a_n = b_n + 1$ и $a_j = 0, b_j = 9$ за всички $j \in \{n+1, n+2, ...\}$
    Тоест $a_0.a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_n00 \cdots = a_0.a_1a_2 \cdots a_{n-1}(a_n{-}1)99 \cdots$ $(1.33 \cdots 3300 \cdots = 1.33 \cdots 3299 \cdots)$
- *Сравняване:*
  1. $a \geq 0, b \geq 0$
     $$a \leq b \iff \begin{cases} a_i = b_i, & \forall i \in 0, 1, 2, ... \\ \text{или} & \\ \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, & a_i = b_i\ \forall i \in \{0, 1, ..., n-1\} \text{ и } a_n < b_n \end{cases}$$
  2. $a \leq 0, b \geq 0$ $\quad a \leq b$
  3. $a \leq 0, b \leq 0$ $\quad a \leq b \iff |a| \geq |b|$

1.2 Граници и ограниченост

Нека $A \subset \mathbb{R}$

- *Множество, ограничено отгоре* $\quad \exists M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \leq M$ $\quad$ *M - горна граница (мажоранта)*
  Най-малката горна граница наричаме *точна горна граница или супремум на A* ($\sup A$)
  1. $a \leq \sup A\ \forall a \in A$ $\quad$ ($\sup A$ е горна граница)
  2. $\forall c < \sup A\ \exists a \in A : a > c$ $\quad$ (няма по-малка горна граница)
- *Множество, ограничено отдолу* $\quad \exists M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \geq M$ $\quad$ *M - долна граница (миноранта)*
  Най-малката долна граница наричаме *точна долна граница или инфимум на A* ($\inf A$)
- *Ограничено множество* $\quad$ Ако е ограничено отдолу и отгоре

Принцип на непрекъснатост: Всяко ограничено отгоре непразно множество $A \subset \mathbb{R}$ има супремум.
Всяко ограничено отдолу непразно множество $A \subset \mathbb{R}$ има инфимум.

Цялата част на $x \in \mathbb{R}$: най-голямото цяло число z, ненадминаващо x. $\quad \lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$

Лекция 2 Реални числа - втора част и сходящи редици

2.1 Непрекъснати наредени полета

Нека R е поле с дефинирани събиране, умножение е релацията $\preceq$:

$$\oplus : R \to R, \quad \otimes : R \to R, \quad \preceq \subset R \times R$$

$(R, \oplus, \otimes, \preceq)$ се нарича непрекъснато наредено поле, ако са в сила:

I. Аксиоми за събирането

1. *Асоциативност* $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in R$
2. *Комутативност* $a \oplus b = b \oplus a \quad \forall a \in R \, \forall b \in R$
3. *Неутрален елемент* $\exists 0 \in R \, \forall a \in R : a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$
4. *Противоположен елемент* $\forall a \in R \, \exists (-a) \in R : a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = 0$

II. Аксиоми за умножението

1. *Асоциативност* $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \quad \forall a, b, c \in R$
2. *Комутативност* $a \otimes b = b \otimes a \quad \forall a \in R \, \forall b \in R$
3. *Неутрален елемент* $\exists e \in R \, \forall a \in R : a \otimes e = e \otimes a = a$
4. *Обратен елемент* $\forall a \in R, a \neq 0 \, \exists a^{-1} \in R : a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = e$
5. *Дистрибутивност* $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \quad \forall a, b, c \in R$

III. Аксиоми, свързани с наредбата

1. $\forall a, b \in R : \quad a \preceq b$ или $b \preceq a$
2. *Рефлексивност* $a \preceq a \quad \forall a \in R$
3. *Антисиметричност* $a \preceq a$ и $b \preceq a \implies a = b \quad \forall a, b \in R$
4. *Транзитивност* $a \preceq b$ и $b \preceq c \implies a \preceq c \quad \forall a, b, c, \in R$
5. *Връзка със събирането* $a \preceq b \implies a \oplus c \preceq b \oplus c \quad \forall a, b, c \in R$
6. *Връзка с умножението* $a \preceq b \implies a \otimes c \preceq b \otimes c \quad \forall a, b, c \in R$

Аксиома на Архимед: Ако $(R, \oplus, \otimes, \preceq)$ е непрекъснато наредено поле с неутрален елемент e относно умножението, то $\{e, e + e, e + e + e, ...\}$ не е ограничено отгоре.

2.2 Изброими множества и редици

Кофинитно множество: Едно множество $A \subset \mathbb{N}$ от естествени числа се нарича кофинитно, ако $\mathbb{N} \setminus A$ е крайно или празно. (тоест, започва от някое число в $\mathbb{N}$ и продължава до безкрайност)

Околност на точка: Нека $a \in \mathbb{R}$ и $U \subset R$. U е околност на точката a, ако съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$

Ако разглеждаме $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$, говорим за *пробита околност*

Граница на редица: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ има граница $a \in \mathbb{R}$, ако за всяка околност на a, $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in U\}$ е кофинитно. (тоест, ако всяка околност на a съдържа почти всички членове)

Сходяща редица: Ако за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ съществува $a \in \mathbb{R}$, такова че $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ или $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

Разходяща редица: Ако не е сходяща

Лекция 3 Редици от реални числа

3.1 Основни свойства на сходящи редици

Ако не е определено друго: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a, \quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

1. Добавянето и премахването на краен брой членове не влияе на сходимостта (и границата)
2. Сходящите редици са ограничени
3. Ако $a_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad$ то $\quad a \le b$
4. *Лема за двамата полицаи:* Нека $a_n \le c_n \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
   Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a, \quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a, \quad$ то $\quad c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad$ (и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща)

   Следствие: Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, то $a_n.b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
5. $a_n \pm b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \pm b \qquad a_n.b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$

   Следствие: Ако $c \in \mathbb{R}$, то $c.a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} ca$

   Следствие: $a_n - b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a - b$
6. Ако $b \neq 0$, то $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{b}$

3.2 Дивергиране към безкрайност

Околност на $+\infty$: Ако съществува $M \in \mathbb{R}$ такова, че $(M, +\infty) \subset U$, то $U \subset \mathbb{R}$ е околност на $+\infty$
Околност на $-\infty$: Ако съществува $M \in \mathbb{R}$ такова, че $(-\infty, M) \subset U$, то $U \subset \mathbb{R}$ е околност на $-\infty$
Околност на ∞: Ако съществува $M > 0$ такова, че $[(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)] \subset U$,
то $U \subset \mathbb{R}$ е околност на ∞

3.3 Монотонни редици

Растяща редица: Ако $a_{n+1} \ge a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е растяща
Намаляваща редица: Ако $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е намаляваща
Монотонна редица: Ако редицата е растяща или нямаляваща
Ако редицата е растяща и намаляваща едновременно, тя е *стационарна*

Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща и ограничена отгоре, тя е сходяща.
Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и ограничена отдолу, тя е сходяща.

3.4 Неперово число

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

Лекция 4 Редици от релани числа. Граници на функции.

4.1 Подредици и точки на сгъстяване

Точка на сгъстяване: $a \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване, ако във всяка околност на a има безброй много членове на редицата
За $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстяване, ако за всяка околност U на x_0, $U \cap D$ е безкрайно

Ако $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, то a е (единствената) точка на сгъстяване

Подредица: Ако задраскаме част от членовете, така че да останат безкрайно много и запазим реда на останалите

Ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща редица ($a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$) и $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е нейна подредица, то $a_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

a е точка на сгъстяване, когато съществува $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$

Теорема на Болцано-Вайерщрас (Принцип за компактност): Всяка ограничена редица има точка на сгъстяване. Еквивалентно, всяка ограничена редица има сходяща подредица.

4.2 Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост

Фундаментална редица: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n_0\ \forall n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$ (тоест, чрез отстраняване на краен брой елементи от началото, разстоянието между произволни два от останалите може да се направи произволно малко)

Необходимо и достатъчно условие на Коши за сходимост на числова редица: Една редица от реални числа е сходяща точно тогава, когато е фундаментална

4.3 Граница на функция

Нека $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ е точка на сгъстаяване на D

Граница на функция (форма на Коши):
f има граница $L \in \mathbb{R}$, при аргумент клонящ към x_0,
ако за всяка околност U на L съществува околност V на x_0, така че за всяко $x \in V \cap D, x \neq x_0 : f(x) \in U$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{ако} \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Граница на функция (форма на Хайне):
f има граница $L \in \mathbb{R}$, при аргумент клонящ към x_0,
ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}$, която клони към x_0, съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ клони към L

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\}, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x : f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

Лекция 5 Граници на функции

Дефинициите за граница на функция във *формата на Коши* и във *формата на Хайне* са еквивалентни

5.1 Основни свойства на граници

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L_f + L_g$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_f \cdot L_g$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L_f}{L_g}$, ако $L_g \neq 0$

При неравенства

- Ако $f(x) \leq g(x)$ за $x \in D$, то $L_1 \leq L_2$
- Ако $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ за $x \in D$ и $L_1 = L_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L_1 = L_2$

Композиция на функции: $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, при $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$

Необходимо и достатъчно условие на Коши за съществуване на граница на функция:

$$\exists L \in \mathbb{R} : \lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in (D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \setminus \{x_0\} : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Лява граница: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) := \lim\limits_{x\to x_0} \left(f|_{D\cap(-\infty,x_0)}\right)(x)$

Дясна граница: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) := \lim\limits_{x\to x_0} \left(f|_{D\cap(x_0,+\infty)}\right)(x)$

Лекция 6 Непрекъснати функции

Непрекъсната функция:

Форма на Коши: $(\forall x_0 \in D)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Форма на Хайне: $(\forall x_0 \in D)\ \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D, x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 : f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$

6.1 Основни теореми

Ако не е посочено друго, работим с $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, която е непрекъсната

Теорема на Болцано: Ако $f(a) \cdot f(b) < 0$, то съществува $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$

Теорема за междинните стойности: Ако $f(a) < c < f(b)$ или $f(b) < c < f(a)$, то съществува $x_0 \in (a, b) : f(x_0) = c$

Интервал: $\Delta \subset \mathbb{R}$ наричаме интервал, ако $x_1 \in \Delta, x_2 \in \Delta, x_1 < x_2 \implies [x_1, x_2] \subset \Delta$

Теорема на Вайерщрас: Щом f е непрекъсната, то f е ограничена и има най-голяма и най-малка стойност

Равномерна непрекъснатост: За $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, f е равномерно непрекъсната в D, ако $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (различава се с това, че никога не зависим от x_0)

Теорема на Кантор: Ако f е непрекъсната, то f е равномерно непрекъсната в $[a, b]$

Лекция 7 Основни елементарни функции

Продължение на функция: За $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ казваме, че $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е продължение на f, ако $\widetilde{f}(x) = f(x)$ за всяко $x \in \mathbb{Q}$

f притежава (единствено) непрекъснато продължение $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, когато f е непрекъсната върху всеки ограничен затворен интервал $[c, d] \cap \mathbb{Q}$

Експонента: Единственото непрекъснато продължение $\widetilde{f_a}$ на $f_a(x) = a^x$ наричаме експонента с основа a, $a^x := \widetilde{f_a}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

7.1 Обратни тригонометрични функции

1. arcsin: $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ $\arcsin \equiv \left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

   $\sin(\arcsin(y)) = y \quad \forall y \in [-1, 1]$ $\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (еквивалентно за останалите)

2. arccos: $\sin|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$ $\arccos \equiv \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$

3. tg: $\mathrm{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, +\infty)$ $\mathrm{arctg} \equiv \left(\mathrm{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1} : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

4. arccotg: $\mathrm{cotg}|_{(0,\pi)} : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$ $\mathrm{arccotg} \equiv \left(\mathrm{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$

7.2 Основни граници

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0 \qquad \lim_{x\to x_0} c = c \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} a^x = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\right) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a > 0 \quad \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\right)$$

$$e^x = \lim_{n\to 0}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n b_n}, \quad p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$$

Неравенство на Бернули: $(1+x)^n \geq 1 + nx, x \geq -1$

Лекция 8 Диференцируемост и производна

Диференцируемост на функция: $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точка $x \in \Delta$, ако съществува граница $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$f'(x) := \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Ако f е диференцируема в x, то f е непрекъсната в x

8.1 Правила за диференциране

1. *Диференциране на сума:* $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
   Диференциране на разлика: $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
2. *Диференциране на произведение:* $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
   Диференциране на произведение с константа: $(cf)'(x) = cf'(x)$
   Диференциране на частно: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
3. *Диференциране на композиция от функция:* $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$
4. *Дифернциране на обратна биекция:* $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

8.2 Основни производни

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a > 0) \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1) \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$